En tenant compte du fait que les continus péaniens plans coupant R_2 en un nombre fini des régions coïncident avec les continus plans localement conctractiles[6]) et les continus plans ne coupant pas R_2 avec les rétractes absolus [7]), on peut formuler notre théorème comme il suit:

Tout continu plan localement contractile est une somme de deux rétractes absolus.

Le théorème analogue pour les continus péaniens plans [8]) arbitraires ainsi que pour les continus localement conctractiles non plans [9]) serait en défaut.

[6]) Le continu P est dit localement contractile lorsque tout entourage U de chacun de ses points p contient un entourage de p qui se laisse contracter dans U c. à d. un entourage U_0 pour lequel il existe une fonction $f(x, t)$ continue par rapport aux deux variables $x \varepsilon U_0$ et $0 \leqslant t \leqslant 1$ à la fois et telle que $f(x, 0) = x$, $f(x, t) \varepsilon U$ et $f(x, 1) = const.$ quels que soient $x \varepsilon U_0$ et $0 \leqslant t \leqslant 1$. En ce qui concerne la caractérisation des continus péaniens plans qui coupent R_2 en un nombre fini des régions par la contractilité locale, voir Fund. Math. 19 (1932), p. 240.

[7]) L'ensemble A est dit rétracte absolu, lorsqu'il existe pour tout espace métrique séparable $E \supset A$ une fonction continue f transformant E en A de manière que $f(x) = x$ pour tout $x \varepsilon A$.

[8]) Cf. Fund. Math. 22 (1934), p. 287.

[9]) Cf. la note de M. S. Mazurkiewicz et moi, C. R. 199 (1934), p. 110.

Über exponierte Punkte abgeschlossener Punktmengen.

Von

Stefan Straszewicz (Warszawa).

Zu den Grundbegriffen der Minkowski'schen Theorie der konvexen Körper gehört der Begriff des *extremen Punktes* einer konvexen Menge. In der nachfolgenden Mitteilung wird der engere Begriff des *exponierten Punktes* eingeführt, der in den Anwendungen ähnliche Dienste leistet und den Vorteil bietet, direkt für beliebige abgeschlossene Punktmengen definiert zu sein.

1. Im Folgenden wird mit M eine abgeschlossene und beschränkte Punktmenge im n-dimensionalen euklidischen Raume R_n bezeichnet. Eine $(n-1)$-dimensionale Ebene des R_n wird kurz „Ebene" genannt. Eine Ebene E heisst *Stützebene* von M, falls 1) $EM \neq 0$ und 2) M ganz in einem der von E bestimmten abgeschlossenen Halbräume des R_n liegt. Die Menge M hat dieselben Stützebenen, wie ihre konvexe Hülle $H(M)$.

Definition. Ein Punkt a der Menge M heisst *exponierter Punkt von M*, falls es eine Stützebene von M gibt, die mit M nur den Punkt a gemeinsam hat.

2. Die Verteilung der exponierten Punkte in M wird durch folgenden Satz charakterisiert:

Jeder offene Halbraum, welcher Punkte von M enthält, enthält auch exponierte Punkte von M.

Beweis. Zu jedem Raumpunkte p gehört eine kleinste n-dimensionale Kugel vom Mittelpunkte p, welche die Menge M enthält.

Ihre Oberfläche S_p hat einen nichtleeren Durchschnitt mit M und jeder Punkt von MS_p ist offenbar exponierter Punkt von M.

Es seien nun: E eine Ebene, Q_1 und Q_2 die von ihr bestimmten offenen Halbräume von R_n und p ein Punkt von MQ_1. Der Abstand des Punktes p von E heisse η und der Durchmesser von M sei δ. Durch p legen wir die Senkrechte zu E und tragen auf dieser Geraden von p aus in der Richtung nach dem Schnittpunkte mit E die Länge $\frac{\delta^2}{\eta}$ ab, bis zum Punkte q. Die Oberfläche S_q der kleinsten Kugel vom Mittelpunkte q, welche M enthält, wird durch E in zwei Teile zerlegt: $S_q = S_q Q_1 + \overline{S_q Q_2}$. Die Menge $\overline{S_q Q_2}$ enthält sicher keinen Punkt von M, denn ist sie nicht leer, so ist die Entfernung eines jeden ihrer Punkte von p grösser als δ, wie eine elementare Rechnung ergibt. Folglich enthält $S_q Q_1$ mindestens einen Punkt von M, der, wie oben bemerkt, ein exponierter Punkt von M ist.

Beachten wir, dass der Durchschnitt aller abgeschlossenen, M enthaltenden Halbräume die konvexe Hülle $H(M)$ von M ist, so können wir dem obigen Satze die Form geben:

Die Menge $A(M)$ der exponierten Punkte von M hat die gleiche konvexe Hülle, wie M selbst. In Zeichen

$$H(M) = H(A(M)). \tag{1}$$

Für eine konvexe[1]) Menge K ist also

$$K = H(A(K)), \quad \text{d. h.} \tag{2}$$

Jede konvexe Menge ist konvexe Hülle der Menge ihrer exponierten Punkte. Konvexe Mengen mit den nämlichen exponierten Punkten sind also identisch.

3. Enthält M $k+1$ Punkte $(k \leqslant n)$, die Ecken eines k-dimensionalen Simplexes sind, so folgt aus 2., dass auch $A(M)$ $k+1$ solche Punkte enthält. Diese Tatsache können wir benutzen, um eine einfache Eigenschaft Jordanscher Kurven herzuleiten.

Ein innerer Punkt a eines einfachen Jordanbogens I heisse ein *Konvexitätspunkt* von I, falls es eine Umgebung U von a gibt derart, dass a exponierter Punkt von $I \cdot U$ ist. Aus der obigen Bemerkung folgt der Satz:

Ein innerer Punkt von I ist entweder Häufungspunkt von Konvexitätspunkten, oder innerer Punkt einer geradlinigen Teilstrecke von I.

4. *Hilfssatz. Ist E eine Stützebene von M, so gilt*

$$H(ME) = H(M) \cdot E\,[2]). \tag{3}$$

Einer besseren Übersicht halber möge hier der Beweis auseinandergesetzt werden.

Beweis. Die Beziehung $H(ME) \subset H(M) \cdot E$ ist evident, es braucht also nur die Inklusion $H(M) \cdot E \subset H(ME)$ bewiesen zu werden. Es sei p ein Punkt, der nicht zu $H(ME)$ gehört; wir zeigen dass er auch nicht zu $H(M)E$ gehören kann. Der Punkt p lässt sich in E von der konvexen Menge $H(ME)$ durch eine $(n-2)$-dimensionale Ebene G trennen. Das System der Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sei so gewählt, dass folgendes gilt: α) E hat die Gleichung $x_1 = 0$, β) G hat die Gleichungen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, γ) $H(M)$ liegt im Halbraume $x_1 \leqq 0$, δ) für Punkte von $H(ME)$ ist $x_1 = 0$, $x_2 > 0$, ε) die Koordinaten von p sind $p_1 = p_3 = \ldots = p_n = 0$ und $p_2 < 0$.

Wir betrachten nun diejenigen Punkte von M, für welche das Verhältnis $\lambda = \frac{x_1}{x_2}$ positiv ist. Nach γ) ist für solche Punkte $x_1 < 0$, $x_2 < 0$. Die untere Grenze λ_0 dieser positiven Werte von λ ist sicher positiv. Wäre nämlich $\lambda_0 = 0$, so müsste die Menge M, da sie beschränkt ist, Punkte enthalten, für welche x_1 absolut beliebig klein und $x_2 < 0$ ist. Wegen der Abgeschlossenheit hätte dann M auch Punkte mit $x_1 = 0$, $x_2 \leqq 0$, was nach δ) unmöglich ist. Also ist $\lambda_0 > 0$.

Wir konstatieren demnach, dass für keinen Punkt von M $x_1 - \frac{\lambda_0}{2} x_2 > 0$ sein kann. Es liegt also M und somit auch $H(M)$ im Halbraume $x_1 - \frac{\lambda_0}{2} x_2 \leqq 0$. Der Punkt p befindet sich aber nach ε) ausserhalb dieses Halbraumes, gehört also der konvexen Hülle $H(M)$ nicht an w. z. b. w.

[1]) Unter konvexen Mengen werden hier stets abgeschlossene konvexe Mengen verstanden.

[2]) C. Carathéodory, *Über den Variabilitätsbereich der Fourier'schen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen.* Rendiconti di Palermo Bd. 32, S. 199 (1911). Auch S. Straszewicz l. c. in Anmerkung [4]).

5. *Eine abgeschlossene und beschränkte Menge M hat die gleichen exponierten Punkte wie ihre konvexe Hülle. D. h.*

$$A(M) = A(H(M)). \tag{4}$$

Beweis. Ist a exponierter Punkt von $H(M)$, so gibt es eine Stützebene E von $H(M)$, für welche $H(M)\,E = \{a\}$ ist; dann ist nach (3) auch $ME = \{a\}$, also ist a exponierter Punkt von M.

Wenn umgekehrt a exponierter Punkt von M ist, und E eine Stützebene an M [und daher auch an $H(M)$] mit $ME = \{a\}$, so folgt wieder aus (3) dass $H(M)\,E = \{a\}$ ist, und das bedeutet, dass a exponierter Punkt von $H(M)$ ist.

Folgerung. Abgeschlossene und beschränkte Punktmengen mit derselben konvexen Hülle haben dieselben exponierten Punkte.

Und weiter:

Unter den abgeschlossenen und beschränkten Punktmengen mit gemeinsamer konvexer Hülle K gibt es eine kleinste: es ist die abgeschlossene Hülle $\overline{A(K)}$ der Menge $A(K)$ der exponierten Punkte von K.

Denn ist $H(M) = K$, so folgt nach (4): $A(K) = A(M) \subset M$ somit

$$\overline{A(K)} \subset M.$$

Andererseits, da $H(\overline{A(K)}) = H(A(K))$ ist, so liefert (2):

$$H(\overline{A(K)}) = K. \tag{5}$$

6. Nach Minkowski [3]) heisst ein Punkt einer konvexen Menge K *extremer* Punkt von K, wenn er nicht innerer Punkt einer zu K gehörenden Strecke ist. Jeder exponierte Punkt von K ist zugleich ihr extremer Punkt (aber nicht umgekehrt; Beispiel: die äussersten Parallelkreise der konvexen Hülle eines Torus im R_3). Demnach folgen aus den Sätzen von 2. entsprechende Sätze für extreme Punkte.

Bekanntlich lässt sich die konvexe Hülle einer abgeschlossenen und beschränkten Menge M in der Weise erzeugen, dass man die Verbindungsstrecken je zweier Punkte von M mit M vereinigt, auf die erhaltene Menge die gleiche Konstruktion anwendet und so fortfährt. Nach einer endlichen Anzahl von Schritten, die $\leqq$ der

[3]) Ges. Abhandlungen Bd. II, § 12.

Ziffernzahl in der dyadischen Entwicklung der Dimensionszahl n des Raumes ist, erhält man $H(M)$ [4]). Die Punkte, die jedesmal zu M hinzugefügt werden, sind sicher keine extremen Punkte von $H(M)$, also muss M die Menge der extremen Punkte von $H(M)$ enthalten.

Mit Rücksicht auf (5) folgert man:

Die Menge der extremen Punkte einer konvexen Menge K ist enthalten in $\overline{A(K)}$. Oder auch:

Die Menge der exponierten Punkte von K ist in der Menge der extremen Punkte von K dicht.

Es sei bemerkt, dass keine dieser beiden Mengen abgeschlossen zu sein braucht. Beispiel: konvexe Hülle der Menge M von R_3 bestehend aus der Kreislinie $(x_1 - 1)^2 + x_2^2 = 1$, $x_3 = 0$, und den Punkten $(0, 0, 1)$ und $(0, 0, -1)$.

7. Dual zum Begriffe des exponierten Punktes ist der Begriff der *exponierten Stützebene* einer Menge M: es heisst so eine Stützebene E von M, wenn es auf E einen Punkt $p \in M$ gibt derart, dass E die einzige Stützebene durch p an M ist. Eine exponierte Stützebene einer konvexen Menge K ist zugleich eine *extreme* Stützebene von K (im Sinne von Minkowski, l. c. § 13), aber nicht umgekehrt (Beispiel: Rotationskörper eines Kreisabschnitts um seine Sehne).

Es lassen sich über exponierte Stützebenen Sätze aufstellen, die denjenigen für exponierte Punkte analog sind.

[4]) H. Brunn, *Über das durch eine beliebige endliche Figur bestimmte Eigebilde*, Boltzmann-Festschrift, 1904, S. 94. S. Straszewicz, *Beiträge zur Theorie der konvexen Punktmengen*, Inauguraldissertation, Zürich 1914.